Grado en Matemáticas – Análisis Matemático I

1. (1 punto) Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.

2. (1,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar dado para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ por:

$$f(x, y) = \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   y $f(0, 0) = 0$. Prueba que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y estudia la existencia de las derivadas parciales de segundo orden de f en $(0, 0)$.

3. (1,5 puntos) Justifica que la igualdad

$$xyz + \operatorname{sen}(z - 6) - 2(x + y + x^2 y^2) = 0$$

   define a z como función implícita de (x, y) en un entorno abierto de $(1, 1)$ con $z(1, 1) = 6$. Comprueba que $(1, 1)$ es un punto crítico de la función $z = z(x, y)$ y clasifícalo.

4. (2,5 puntos) a) Indica qué condición debe cumplir a para que el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ux^3 + vy + au - 1 & = & 0 \\ xy^2 + 2uv^3 + av - a & = & 0 \end{array} \right.$$

   defina a u y a v como funciones implícitas (de clase $\mathcal{C}^\infty$) de x e y en un entorno del punto $(0, 1)$ siendo $u(0, 1) = 0$, $v(0, 1) = 1$.

   b) Supuesto que a satisface la condición encontrada en el apartado anterior, prueba que la función $G(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ tiene una inversa local en de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno abierto de $(0, 1)$. Si es F dicha inversa local, calcula la matriz jacobiana de F en $(0, 1)$.

5. (2 puntos)

   a) Clasifica los puntos críticos del campo escalar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

   b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2\right\}$$

6. (1,5 puntos) Elige para responder uno de los temas siguientes:

   a) Teorema de Bolzano-Weierstrass. Caracterización de la compacidad en espacios normados de dimensión finita.

   b) Regla de la cadena.

Granada, 6 de febrero de 2015